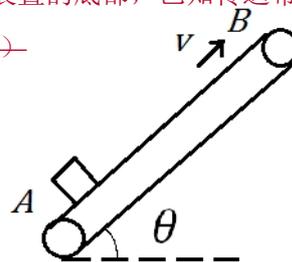


2018年清华大学自主招生物理试题

1. 如图所示的传送带装置，与水平面的夹角为 θ ，且 $\sin\theta = 0.75$ 。传送带的速度为 $v = 4\text{m/s}$ ，摩擦系数为 $\mu = 0.8$ ，将一个质量 $m = 4\text{kg}$ 的小物块轻轻的放置在装置的底部，已知传送带装置的底部到顶部之间的距离 $L = 20\text{m}$ 。（本题重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$ ）



- (1) 求物块从传送带底部运动到顶部的时间；
 (2) 求此过程中传送带对物块所做的功。

1. 【解答】

(1) 如图做受力分析。垂直斜面方向受力平衡： $N = mg \cos\theta = 4 \times \frac{4}{5}$

则摩擦力 f_1 为： $f_1 = \mu N = \frac{5}{4} \times 4 \times \frac{4}{5} = 4$

平行斜面方向做匀加速运动： $a = \frac{f_1 - mg \sin\theta}{m} = \frac{4 - 3 \times \frac{4}{5}}{4} = \frac{2}{5}$

则 $v = at = 4\text{m/s}$ ，且方向沿传送带向上

运动到物块速度与传送带速度相同时经过的时间为： $t_1 = \frac{v}{a} = 1\text{s}$

运动的距离为： $s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = 2\text{m}$

剩下的距离为 $s_2 = L - s_1 = 18\text{m}$ ，之后物块与传送带一起作匀速运动，则 $t_2 = \frac{s_2}{v} = 4.5\text{s}$

故 $t = t_1 + t_2 = 5.5\text{s}$

(2) 法一：由第一问可知，在物块加速过程中摩擦力为 $f_1 = 4\text{N}$

此时摩擦力对物块做功 $W_1 = f_1 s_1 = 8\text{J}$

匀速过程中摩擦力满足： $f_2 = \mu N = 35 \times \frac{4}{5} = 28\text{N}$

则传送带做功 $W_2 = f_2 s_2 = 504\text{J}$

则总做功 $W = W_1 + W_2 = 512\text{J}$

(注：若是求传送带做功，则需考虑内能的变化，此时 $W_1 = f_1 s_1 = 8\text{J}$

W_2 不变，总功为 $W = W_1 + W_2 = 512\text{J}$)

法二：用功能原理，传送带对物块所做的功为物块获得的机械能（动能与重力势能）

则：

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = 512\text{J}$$

2.

已知地球的半径为 R ，地球附近的重力加速度为 g 。一天的时间为 T 。已知在万有引力作用下的势能公式为 $E_p = -\frac{GMm}{r}$ ，其中 M 为地球的质量， r 为卫星到地心的距离。

- (1) 求同步卫星环绕地球的飞行速度；
 (2) 求从地球表面发射同步轨道卫星时的速度 v_0 至少为多少。

2. 【解答】

(1) 在地面上，有（黄金代换）： $mg = G \frac{Mm}{R^2}$ ①

对于同步卫星：
$$G \frac{Mm}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r \quad \text{---②}$$

联立解得：
$$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi g R^2}{T}} \quad \text{---③}$$

(2) 由机械能守恒：
$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r} \quad \text{---④}$$

联立②③④解得：
$$v_0 = \sqrt{2gR \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\pi^2 R}{2gT^2}} \right)}$$

地球自转的速度为
$$u = \frac{2\pi R}{T}$$

则最小的发射速度为
$$u_0 = v_0 - u = \sqrt{2gR \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\pi^2 R}{2gT^2}} \right)} - \frac{2\pi R}{T}$$

3. 在磁场中，一静核衰变成为两核，开始分别做圆周运动。已知和两核圆周运动的半径和周期之比分别为 $r_1:r_2=45:1$ ， $T_1:T_2=90:117$ 。此裂变反应质量亏损为 Δm 。

(1) 求和两核的电荷数之比 q_1/q_2 ；

(2) 求和两核的质量数之比 m_1/m_2 ；

(3) 求静核的质量数和电荷数；

(4) 求核的动能 E_k 。

3【解答】

(1) 由 $r = \frac{mv}{qB}$ ，及动量守恒 $m_1 v_1 = m_2 v_2$ ，可得 $r_1:r_2 = m_2:q_2$ ，故 $q_1:q_2 = 1:45$ 。

(2) 由 $T = \frac{2\pi m}{qB}$ ，有 $m_1/T_1 = m_2 q_1 / q_2 T_2$ ，有 $m_1/m_2 = q_2 T_1 / q_1 T_2 = 2/117$ 。

(3) 由电荷与质量之比，可设 $(Z_1 + Z_2) = 119 Z_0$ ， $(m_1 + m_2) = 460 m_0$ ，其中 Z_0, m_0 为定值，单位分别为一个原子质量单位和一个单位正电荷，可推测 $Z_0 = 2$ ， $m_0 = 2$ ，此核为 $^{238}_{92}\text{U}$ ，质量数为 238，核电荷数为 92。

(4) 动能满足： $E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{q_1^2 B^2 r_1^2}{2m_1}$ ，同样 $E_{k2} = \frac{q_2^2 B^2 r_2^2}{2m_2}$ ，其中 m_1, m_2 为两核动量。

由动量守恒知： $m_1 v_1 = m_2 v_2$ ，于是有 $q_1 r_1 / q_2 r_2 = m_1 / m_2 = 1/172$

则 $E_{k1} = \frac{q_1^2 B^2 r_1^2}{2m_1} = \frac{q_2^2 B^2 r_2^2}{2m_2} = 117 E_{k2} / 119$

4. 假设房间向环境传递热量的速率正比于房间和环境之间的温度差，暖气片向房间传递热量的速度也正比于暖气片与房间之间的温度差。暖气片温度恒为 θ_0 ，当环境温度为 -5°C 时，房间温度保持在 22°C 。当环境温度为 -15°C 时，房间温度保持为 16.5°C 。

(1) 求暖气片的温度 θ_0 ；

(2) 给房子加一层保温材料，使得温差一定时房间散热的速率下降 20%，求环境温度为

15°C时房间的温度。

4【解答】

(1) 设两次房间温度分别为 $t_1=22^\circ\text{C}$, $t_1'=16.5^\circ\text{C}$, 环境温度分别为 $t_2=-5^\circ\text{C}$, $t_2'=-15^\circ\text{C}$, 设暖气片向房间的散热系数为 k_1 , 房间向环境的散热系数为 k_2 , 当房间温度平衡时暖气片向房间的散热速率与房间向环境的散热速率相同, 则有:

$$k_1(t_0 - t_1) = k_2(t_1 - t_2) \quad (4.1)$$

$$k_1(t_0 - t_1') = k_2(t_1' - t_2') \quad (4.2)$$

两式相比可得: $(t_0 - t_1)/(t_0 - t_1') = (t_1 - t_2)/(t_1' - t_2')$

整理, 得: $t_0 = (k_2 t_1' - k_2' t_1) / (k_1' - k_2' - (k_1 - k_2)) = 55^\circ\text{C}$

(2) 设此时房间的温度为 T_1'' .

$$k_1(t_0 - T_1'') = (1 - 20\%)k_2(T_1'' - t_2') \quad (4.3)$$

由(4.1)式可知, $k_1/k_2 = (t_1 - t_2)/(t_0 - t_1) = 9/11$

则由(4.3)得 $T_1'' = (k_1 t_0 + 0.82 k_2 t_2') / (k_1 + 0.82 k_2) \approx 20.4^\circ\text{C}$

5. 蜡烛与光屏的间距为1.8m。从蜡烛处开始移动透镜, 第一次在光屏上出现清晰的像之后, 又向前移动了0.72m时, 再一次出现了清晰的像。求透镜的焦距。

5【解答】

(注: 此方法在实验上称为位移法测透镜焦距, 也叫二次成像法)

令光源蜡烛与光屏间距为 L , 两次成像时, 物距(光源与透镜距离)分别为 u_1, u_2 , 像距分别为 v_1, v_2 , 两次透镜间距为 d , 则由成像公式: $1/u_1 + 1/v_1 = 1/f$(5.1)

由对称性(或光路可逆性), 交换蜡烛与光屏位置, 则成像时透镜在同样位置, 故:

$$u_1 = v_2, v_2 = u_1$$

可得: $u_1 + u_2 = L$(5.2)

$$v_2 - u_1 = d = u_1 - u_2 \quad (5.3)$$

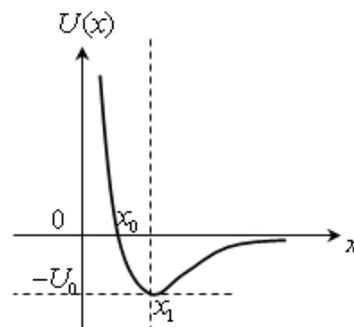
由(5.2)(5.3)相加相减, 消去 u_1, u_2 , 代入(5.1), 整理可得:

$$f = u_1 u_2 / (u_1 + u_2) = (L^2 - d^2) / 4 = 0.378\text{m}$$

6. 在轴轴上有两个点电荷 q_1 和 q_2 (q_1 在 q_2 的左边)。轴轴上每一点处电势随着 x 而变化的关系如右图所示。当 $x=0$ 时, 电势为0; 当 $x=x_1$ 时, 电势有最小值。(点电荷产生的电势为 $U=q/r$)

(1) 求两个电荷 q_1 和 q_2 的位置;

(2) 求两个电荷的比值 q_1/q_2 。



6【解答】

(1) 由于在 $x=0$ 处，电势趋于正无穷，可知在原点有一个正电荷，即 q_1 或 q_2 在 $x=0$ 处。假设 q_1 在原点，则 q_2 在正半轴，此时在正半轴一定有某处（即 q_2 所处位置）电势为无穷大，与图像矛盾，则只能是 q_2 在原点， q_1 在负半轴。

又由于总电势可以为负，则可知 $q_2 < 0$ ，设 q_1 位置 $(-x_1, 0)$, $q_2 < 0$

在 $x=0$ 处，总电势为 0，则

$$\frac{q_2}{0} + \frac{q_1}{(0-x_1)} = 0 \dots\dots(6.1)$$

在 $x=x_1$ 处，电势最低点，则电场强度为 0

$$\frac{q_2}{x_1^2} + \frac{q_1}{(x_1-x_1)^2} = 0 \dots\dots(6.2)$$

由(6.1)(6.2)可解得： $q_2 = 2q_1 - q_1^2/x_1$

$$q_1 q_2 = -(1 - x_1/x_0)^2$$

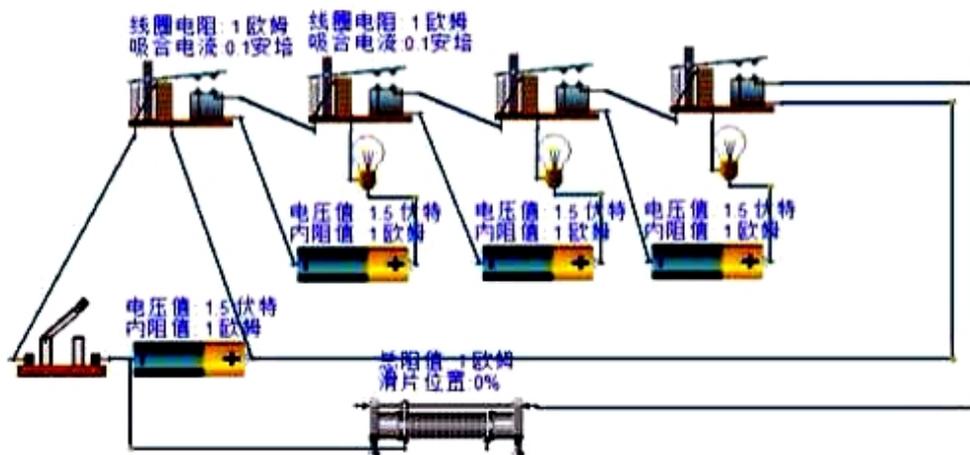
则两点电荷位置为 $q_1: (2x_1 - x_1^2/x_0, 0)$, $q_2: (0, 0)$

电荷比为 $q_1 q_2 = -(1 - x_1/x_0)^2$

7. 在如下图所示的电路中，有四个电磁继电器。相关参数标注在图上（图片来自网络）。

(1) 闭合开关后有何现象；

(2) 改变滑动变阻器的阻值（总阻值为 1 欧姆），闭合开关后的现象与 (1) 有何不同。



7.【解答】

(1) 闭合开关后，四个继电器会从左往右依次闭合，三个灯泡从左往右依次亮。到最后一个继电器闭合后，电源被短路（由于此时的滑动变阻器电阻为零），则四个继电器从左往右又会依次打开，三个灯泡从左往右依次熄灭。直到最后一个继电器打开，电源又接入电路。四个继电器又将依次闭合，三个灯泡又将依次亮起。依此一直循环下去。

(2) 只考虑第一个电磁继电器与滑动变阻器、电源所组成的电路，则其实为继电器与变阻器并联，继而与电池相连的电路。设 r_1 为第一个继电器的线圈电阻， r_2 为滑动变阻器的电阻， r_0 为电源的内阻， E 为电源电动势， I 为整体电流， I_1 为通过电磁继电器电流，则稳定时：

$$I_1 = I r_2 / (r_1 + r_2)$$

$$\text{消去 } I, \text{ 有: } I_1 = E r_2 / (r_1 r_2 + (r_1 + r_2) r_0) = 3E r_2 / (4r_2 + 2r_0)$$

$$\text{当 } I_1 > 0.1A \text{ 时, } r_2 > 1/13 \Omega = 0.077 \Omega.$$

即当滑动变阻器的电阻小于 0.077Ω 时，现象与第一问一样。

当滑动变阻器的电阻大于 0.077Ω 时，无论第四个继电器是否闭合，第一个继电器始终达到吸附电流， $I_1 > 0.1A$ ，则不会断开，因此当四个继电器都闭合之后，电路将保持这样的状态，三个灯泡全部亮起，不会像第一问一样循环闪烁。